Análisis Matemático III. Curso 4.
Examen Parcial. Tercera fecha. 16 de diciembre de 2021.

Justificar claramente todas las respuestas. Los requisitos para aprobar están detallados en el instructivo publicado en el aula virtual de este curso.

1. En cada uno de los siguientes casos, argumentar si la afirmación es verdadera o falsa:

   i) Si $f = u + iv$ es holomorfa en $\mathbb{C}$ entonces $u^2 - v^2$ es armónica en $\mathbb{R}^2$.

   ii) $\displaystyle\int_{|z|=1} \bar{z}\,\mathrm{Arg(z)}\,dz = 0.$

2. Calcular $\displaystyle\int_{\gamma'} \cos z \operatorname{sen} z\, dz$ siendo γ el arco de la circunferencia de centro en el origen y radio 1, contenido en el primer cuadrante y con punto inicial en $z = i$. ¿Qué se puede decir del valor de la misma integral si se reemplaza la curva γ por otra curva simple con punto inicial $z = 1$ y punto final $z = i$?

   Analizar para qué valores de $r > 0$, está bien definida la integral $\displaystyle\int_{C_r{}^+} \frac{\cos z \operatorname{sen} z}{z - i}\, dz$ siendo $C_r = \{z \in \mathbb{C} : |z + 1| = r\}$. Elegir un r para el cual la integral no se anula y calcularla para el valor de r elegido.

3. Dada la la función $f(z) = \dfrac{1}{z + 2 - i}$, describir cada uno de los dominios de $\mathbb{C}$ donde $f(z)$ admite un desarrollo de Laurent de la forma $\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z - 3)^k$.

   Determinar si la función $\mathrm{Log}(z + 2 - i)$ admite un desarrollo de Taylor en potencias de $z - 3$. En caso afirmativo, indicar su región de convergencia y obtener dicho desarrollo.

4. Hallar y clasificar las singularidades en el plano complejo de la función

$$f(z) = \frac{\operatorname{sen} z}{z^2 (z^2 - 1) \operatorname{sen}(\frac{\pi}{z-1})}.$$

   y calcular $\displaystyle\int_{C^+} f(z)\, dz$ con $C = \{z \in \mathbb{C} : |z + 1| = 1/2\}$.